

COMPÉTENCE 3

Savoir représenter un nombre décimal en binaire

On utilisera ici exclusivement la représentation des décimaux selon la norme IEEE-754, sur 32 bits.

❖ Exercice 3.1 : La norme (★)

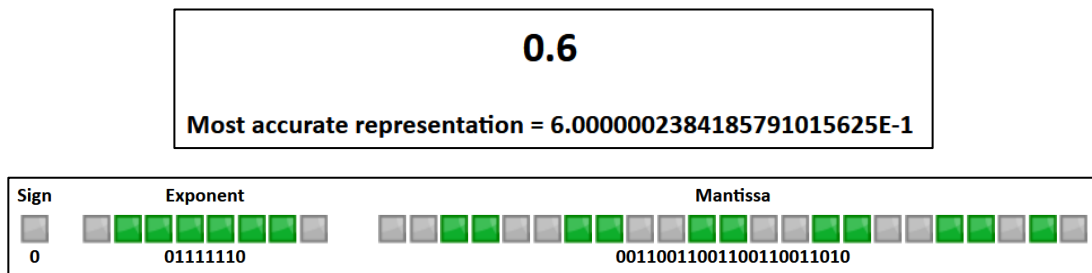
Rappeler la répartition des 32 bits : signe, exposant et mantisse.

❖ Exercice 3.2 : Comment convertir un décimal en binaire ? (★)

1. Donner la représentation des nombres 0.1 , 0.25 et 1/3 en binaire sur 32 bits avec la norme IEEE-754. Pour arrondir le dernier bit de la mantisse, on regarde le premier bit non représenté : on arrondit à 1 si le bit suivant vaut 1, 0 sinon.

On pourra vérifier le résultat sur le site <http://www.binaryconvert.com>

Par exemple :



2. Mettre en évidence une périodicité éventuelle dans la mantisse et conclure sur le caractère représentable ou non de ces nombres en binaire.
3. Quel résultat donne l'addition 0.1 + 0.2 dans une console Python ? Expliquer pourquoi.
4. Quelles conséquences peuvent avoir ces erreurs d'arrondi dans un programme informatique ?

❖ Exercice 3.3 : Comparaison de deux nombres décimaux (★)

1. On souhaite évaluer l'expression $0.1+0.1+0.1==0.3$. Que donne ce test dans le shell ? Ce résultat était-il prévisible ?
2. Au vu de ce résultat, pensez-vous pertinent de tester dans un programme l'égalité de deux flottants ?
3. Proposer une solution permettant de tester l'égalité de deux flottants, en contournant le problème de représentation rencontré précédemment.
4. Écrire une fonction **egalite(a,b,epsilon)** qui retourne True si les deux flottants a et b diffèrent de moins de la quantité epsilon.
 - a. Trouver par tâtonnement la valeur minimal de epsilon permettant de montrer que $0.1+0.1+0.1$ est égal à 0.3.
 - b. Trouver cette même valeur à l'aide d'un boucle while.

❖ Exercice 3.4 : Patriot missile software problem (★)

Une batterie de missile Patriot fut capable de détecter et de détruire les missiles Scud Irakiens lors de la guerre du Golfe en 1991. Pourtant, ce 25 février 1991, 28 soldats américains trouvèrent la mort, à cause d'une erreur de représentation d'un nombre décimal en binaire. Voici pourquoi :



Une batterie de missiles Patriot détecte les missiles ennemis et les intercepte avec un contre-missile. La batterie mesure le temps pour prévoir le déplacement des missiles ennemis.

Elle dispose d'un compteur (un entier) que nous appellerons c qui compte le nombre de dixièmes de secondes écoulées depuis sa mise en marche. Le temps écoulé t est calculé par l'opération suivante $t=c \times 0.1$. Nous nous intéressons à l'erreur de calcul commise lors de cette multiplication.

D'après un rapport du General Accounting Office [GAO92], le logiciel du Patriot utilise des nombres à virgule fixe ayant 24 chiffres après la virgule. Pour stocker un réel x , on stocke l'entier $\lfloor x \times 2^{24} \rfloor$ (la partie entière de x multipliée par 2^{24}), les chiffres au delà du 24ème après la virgule sont tronqués.

Sauf précision contraire, toutes les valeurs numériques demandées doivent être données en base 10.

0. Écrire en base 2 le nombre 0.1, on s'arrêtera à 24 chiffres après la virgule. On note y le nombre obtenu en tronquant 0.1 à 24 chiffres après la virgule.

1. Combien vaut $0.1 - y$?

Le calcul à virgule fixe induit une erreur de calcul sur le dernier chiffre. On note z le nombre obtenu en changeant le 24^{ème} bit après la virgule de y .

2. Combien valent $y - z$ et $0,1 - z$?

On note $\varepsilon = |0,1 - z|$. La batterie de missiles Patriot fait une erreur de ε en approximant 0.1.

Début février 1991, l'armée israélienne a empiriquement constaté qu'au bout de 8h, la précision des missiles est significativement réduite. Puis, le 25 février 1991, six batteries de missiles Patriot (un bataillon) ont été déployées à Dhahran, en Arabie Saoudite, pendant 100h.

3. Exprimer en fonction de ε l'erreur commise sur t par la batterie au bout de 8h puis au bout de 100h. Nous noterons e_8 et e_{100} ces erreurs.

4. Donnez une valeur approchée des deux erreurs précédentes.

Un Scud a une vitesse de croisière de Mach 5, soit environ 1702 m/s.

5. Pendant un temps de e_{100} de combien de mètres se déplace un Scud ?

Le système radar détecta bel et bien le Scud mais tous les missiles lancés le ratèrent inévitablement. Au début, on crut à un défaut de cette batterie et on la retira du service en moins d'une journée. La réalité était toute autre : les Israéliens avaient déjà identifié le problème et informé l'armée des États-Unis ainsi que le fabricant du logiciel de tir le 11 février 1991 mais aucune mise à niveau n'existait alors. On avait demandé à défaut d'autre chose aux commandants d'unités d'effectuer des réinitialisations régulières du système mais cette mesure avait dû se révéler insuffisante pour Dharan car les militaires n'en avaient pas compris l'utilité. Le fabricant parvint à fournir une mise à jour le 26, un jour trop tard pour les 28 militaires de Dharan.