Correction des exemples de la compétence 6

Exemple 1 :

L'algo remplace tous les éléments de la liste par des zéros

Terminaison :

On cherche à exhiber un entier naturel qui décroit strictement à chaque tour de boucle.

- k ne convient pas il augmente à chaque tour ($k = k + 1$)
- $len(liste)$ est un entier de taille constante.
- $len(liste) - k$ convient. On peut re-écrire la condition du while en : while len(liste)-k >0
  `len(liste)-k` est un variant de boucle. La quantité $len(liste) - k$ décroit strictement à chaque tour de boucle. **L'algorithme termine.**

Correction partielle :

On cherche une propriété qui soit invariante lors du passage dans la boucle. On démontre par récurrence sur n qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de n, donc pour chaque tour de boucle.

A chaque tour, on remplace un élément par un zéro.

Propriété $\mathscr{P}$: **« `La sous-liste [0:k] contient k zéros` »**

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

On vérifie que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 1, c'est-à-dire au premier tour de boucle.

- Avant le premier tour, k=0, L[0 :k] vaut L[0 :0] qui est égal à [] et qui contient donc k zéro soit 0 zéros.
- En fin de premier tour : k=1, et L[0 :k]= L[0 :1]=[0] : la sous-liste contient k=1 zéro.

La propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie au rang 1.

Hérédité :

Montrons que la propriété $\mathscr{P}$ se transmet du rang k au rank $k + 1$, on dit que la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie au rang k : **« `La sous-liste [0:k] contient k zéros` »**

Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie au rang k+1 :

L[0 :k+1]= L[0 :k]+L[k :k+1]=[0,0,0,0,…0] + L[k:k+1] qui a été affecté de la valeur zéro au début du while donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie au rang k+1.

On a montré que si $\mathscr{P}_k$ est vraie au rang k alors $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est aussi.

Conclusion :

La propriété est vraie pour tout n, grâce à l'initialisation et à l'hérédité.

$\mathscr{P}_0$ vraie -> $\mathscr{P}_1$ vraie -> $\mathscr{P}_2$ vraie-> … -> $\mathscr{P}_k$ vraie-> $\mathscr{P}_{k+1}$ vraie -> $\mathscr{P}_n$ vraie

Terminaison + Correction partielle = Correction totale : l'algorithme 1 est CORRECT

Exemple 2 :

mystere() renvoie le quotient et le reste de la division euclidienne.

Terminaison :

On cherche à exhiber un entier naturel qui décroit strictement à chaque tour de boucle.

- `r-b` est un variant de boucle : r est initialisé à a et on lui soustrait b à chaque tour de boucle. La quantité $r - b$ décroit strictement à chaque tour de boucle. **L'algorithme termine.**

Correction partielle :

On cherche une propriété qui soit invariante lors du passage dans la boucle. On démontre par récurrence sur n qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de n, donc pour chaque tour de boucle.

Propriété $\mathcal{P}_k$: « $\boldsymbol{a = b \times q_k + r_k}$ »

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

On vérifie que $\mathcal{P}$ est vraie au rang 1, c'est-à-dire au premier tour de boucle.

- Avant le premier tour, $q = 0, r = a, a = b \times 0 + r = r$
- En fin de premier tour : $q = 1, r = a - b, a = b \times (q = 1) + (a - b) = a$
- La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie au rang 1.

Hérédité :

Montrons que la propriété $\mathcal{P}$ se transmet du rang k au rank $k + 1$, on dit que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie au rang k : « $\boldsymbol{a = b \times q_k + r_k}$ »

Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie au rang k+1 :

A l'entrée au k+1 tour : « $\boldsymbol{a = b \times q_k + r_k}$ »

A la sortie : $\boldsymbol{q_k}$ a augmenté de 1 et $\boldsymbol{r_k}$ a diminué de b

« $\boldsymbol{a = b \times (q_k + 1) + (r_k - b) = b \times q_k + r_k + b - b = b \times q_k + r_k = a}$ »

Remarque $\boldsymbol{q_k \text{ et } r_k}$ sont deux suites arithmétiques, de raison 1 et -b, et de premier terme q=0 et r=a

On a montré que si $\mathcal{P}_k$ est vraie au rang k alors $\mathcal{P}_{k+1}$ l'est aussi.

Conclusion :

La propriété est vraie pour tout n, grâce à l'initialisation et à l'hérédité.

$\mathcal{P}_0$ vraie -> $\mathcal{P}_1$ vraie -> $\mathcal{P}_2$ vraie-> … -> $\mathcal{P}_k$ vraie-> $\mathcal{P}_{k+1}$ vraie -> $\mathcal{P}_n$ vraie

Terminaison + Correction partielle = Correction totale : l'algorithme 2 est CORRECT

Exemple 3 :

rechercheDicho(elm,T) cherche la présence d'au moins une occurrence de elm dans T.

Terminaison :

On cherche à exhiber un entier naturel qui décroit strictement à chaque tour de boucle.

- **d-g** est un variant de boucle : d est initialisé à $len(T) - 1$ et g est initialisé à 0.
  On a donc d > g.
  A chaque tour,
  1. On calcule m=(g+d)//2 qui appartient à l'intervalle [g,d]
  2. Soit on affecte à g la quantité $m + 1$ soit on affecte à d la quantité $m - 1$
  3. G ne peut qu'augmenter, et d diminuer.
  4. La quantité d-g diminue strictement à chaque tour.
     L'algorithme termine.

Correction partielle :

On cherche une propriété qui soit invariante lors du passage dans la boucle. On démontre par récurrence sur n qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de n, donc pour chaque tour de boucle.

Propriété $\mathscr{P}_k$: « $\boldsymbol{A\ la\ fin\ de\ la\ k^{ème}\ itération, soit\ T[m]\ contient}$

$\boldsymbol{la\ valeur\ cherchée, soit\ l'intervalle\ [g,d]\ a\ diminué\ et\ la}$

$\boldsymbol{sous-liste\ T[g{:}d]\ contient\ la\ valeur\ cherchée}$ »

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

On vérifie que $\mathscr{P}$ est vraie au rang 1, c'est-à-dire au premier tour de boucle.

- Avant le premier tour, elm est dans T[0 :len(T)-1] , qui est la tableau initial et on ,'a pas encore trouvé.
- Après le premier tour :
  - Soit on l'a trouvé
  - Soit on a gardé la « bonne » partie de T : **$T[g{:}d]$ contient l'élément cherché.**
- La propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie au rang 1.

Hérédité :

Montrons que la propriété $\mathscr{P}$ se transmet du rang k au rank $k + 1$, on dit que la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

On suppose $\mathscr{P}_k$ vraie au rang k : « $\boldsymbol{A\ la\ fin\ de\ la\ k^{ème}\ itération, soit\ T[m]\ contient}$

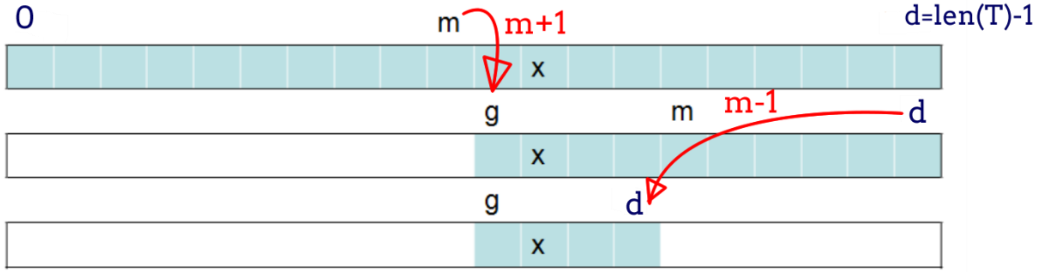
$\boldsymbol{la\ valeur\ cherchée, soit\ l'intervalle\ [g,d]\ a\ diminué\ et\ la}$

$\boldsymbol{sous-liste\ T[g{:}d]\ contient\ la\ valeur\ cherchée}$ »

Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie au rang k+1 :

A l'entrée au k+1 tour : soit on a trouvé, soit on obtient un intervalle strictement plus petit que celui d l'itération précédente, dont on est sûr qu'il contient l'élément cherché.

Remarque : Dans le pire des cas, l'algorithme se terminera avec un sous-tableau $T[g_k{:}d_k]$ réduit à un seul élément, les indices g et d seront égaux, m sera égal à g+d//2 = g = position cherchée.



On a montré que si $\mathscr{P}_k$ est vraie au rang k alors $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est aussi.

Conclusion :

La propriété est vraie pour tout n, grâce à l'initialisation et à l'hérédité.

$\mathscr{P}_0$ vraie -> $\mathscr{P}_1$ vraie -> $\mathscr{P}_2$ vraie-> … -> $\mathscr{P}_k$ vraie-> $\mathscr{P}_{k+1}$ vraie -> $\mathscr{P}_n$ vraie

Terminaison + Correction partielle = Correction totale : l'algorithme 3 est CORRECT